TEMA Tend. Mat. Apl. Comput., **13**, No. 1 (2012), 25-36.
doi: 10.5540/tema.2012.013.01.0025

Termodinâmica Estendida para Materiais Viscoelásticos com Condução de Calor

A. VIGNATTI[1], Departamento de Engenharia e Ciências Exatas da UFES, 29933-480 São Mateus, ES, Brasil.

I-SHIH LIU[2], Instituto de Matemática da UFRJ, 21945-970 Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Resumo. Nesse artigo será apresentada uma formulação de termodinâmica estendida para materiais viscoelásticos com condução de calor. O requerimento da invariância Galileana sobre as equações de balanço e o princípio de entropia conduzem à introdução de multiplicadores de Lagrange, que estabelecem equações constitutivas para os fluxos. Uma condição de hiperbolicidade do sistema de equações é obtido por meio da concavidade da densidade de entropia.

Palavras-chave. Entropia, multiplicadores de Lagrange, gases, fluidos.

1. Introdução

A termodinâmica estendida é uma teoria que complementa as leis usuais de conservação de massa, momento e energia, empregadas na termodinâmica clássica, com um conjunto de equações de balanço adicionais que envolvem o fluxo de calor. Em um total de 13 equações de balanço são determinados 13 momentos: densidade, velocidade, tensor tensão e fluxo de calor [9], [12].

A termodinâmica estendida tem sido aplicada a gases [3], [11], [12], assim como fluidos [10], [13] e sólidos viscoelásticos [6],[7],[8]. Em particular, Vignatti e Liu [13] consideraram a energia como um campo independente e aumentaram a equação da energia total, resultando em um sistema de 14 equações de balanço. O requerimento da invariância Galileana sobre o sistema de equações implica na decomposição dos momentos e fluxos como produtos de duas funções em que uma delas independe do campo velocidade [9], [15].

Este artigo dá continuidade ao trabalho apresentado em [13], seguindo o procedimento nas referências ali citadas. A diferença significativa do artigo [13] para este está na inclusão da equação (3.2), o que caracteriza a teoria para sólidos. Admitindo a concavidade da densidade entropia, foi possível mostrar a positividade do calor específico, a volume constante.

Será usada a mesma notação indicial utilizada em [13]. Em particular $A_{(ij)} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji})$ e o símbolo $\langle\rangle$ indica a simetrização sem traço $A_{\langle ij\rangle} = A_{(ij)} - \frac{1}{3}A_{ss}\delta_{ij}$.

[1] aldovignatti@ceunes.ufes.br
[2] liu@im.ufrj.br

Recebido em 16 Junho 2011; Aceito em 09 Dezembro 2011.

2. Equações de Balanço

As leis de conservação de massa, momento e energia em um sistema de coordenadas espaciais (x_i, t) relativo a um referencial inercial, podem ser escritas como

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho v_k}{\partial x_k} &= 0, \\
\frac{\partial \varrho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\varrho v_i v_k - T_{ik}) &= 0, \\
\frac{\partial \varrho e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\varrho e v_k - v_i T_{ik} + q_k) &= 0,
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

onde ϱ é a densidade de massa, v_i a velocidade, T_{ik} o tensor tensão de Cauchy, q_k o fluxo de energia, $e = (v^2/2 + \varepsilon)$ é a energia total específica e ε a energia interna específica.

A fim de obter um modelo matemático hiperbólico para materiais viscoelásticos com condução de calor são acrescentadas as equações de balanço

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(u_{ij} v_k + G_{ijk}) &= P_{ij}, \\
\frac{\partial u_{iij}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(u_{iij} v_k + G_{iijk}) &= P_{iij},
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

para os momentos u_{ij}, u_{iij}, seus fluxos G_{ijk}, G_{iijk} e produções P_{ij} e P_{iij}. Estas equações são acrescentadas para ser construída uma teoria estendida de 14 momentos para materiais viscoelásticos com condução de calor, por exemplo sólidos. Ao contrário das teorias ordinárias a inclusão das equações (2.2) para u_{ij} e u_{iij} são particulares da teoria estendida. Elas não são leis de conservação devido à presença dos termos de produção P_{ij} e P_{iij} no membro direito.

Analogamente a [13], as partes independentes da velocidade, conhecidas como partes internas dos momentos u_{ij} e u_{iij} serão denotadas por ϱ_{ij} e ϱ_{iij}, dos fluxos G_{ijk} e G_{iijk} por p_{ijk} e p_{iijk} das produções P_{ij} e P_{iij} por π_{ij} e π_{iij}, respectivamente.

Motivado pela teoria cinética de gases, os termos $u_{ij}, G_{ijk}, P_{ij}, u_{iij}, G_{iijk}$, P_{iij} serão admitidos simétricos nos índices i, j. Será admitido ainda que $\pi_0 = 0, \pi_i = 0$ e que as quantidades ϱ_{ij}, $p_{ij} = -T_{ij}$, p_{ijk}, π_{ij}, p_{iik}, p_{iijk}, π_{iij} assim como ϱ, ε, T_{ik}, q_k são quantidades objetivas.

O requerimento da invariância Galileana implica na dependência explícita da velocidade v_i[15] (para mais detalhes, ver [12]), e portanto o sistema (2.1) e (2.2) pode ser escrito no sistema de coordenadas materiais como

$$
\begin{aligned}
\dot{\varrho_\kappa} &= 0, \\
\varrho_\kappa \dot{v}_i + \frac{\partial \hat{p}_{i\alpha}}{\partial X_\alpha} &= 0, \\
\varrho_\kappa \dot{e} + \frac{\partial \hat{G}_\alpha}{\partial X_\alpha} &= 0, \\
\dot{\hat{u}}_{ij} + \frac{\partial \hat{G}_{ij\alpha}}{\partial X_\alpha} &= \varrho_\kappa \pi_{ij}, \\
\dot{\hat{u}}_{iij} + \frac{\partial \hat{G}_{iij\alpha}}{\partial X_\alpha} &= \varrho_\kappa \pi_{iij} + 3\varrho_\kappa v_{(i}\pi_{ij)},
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
\hat{u}_{ij} &= \varrho_\kappa \varrho_{ij} + \varrho_\kappa v_i v_j, \\
\hat{u}_{iij} &= \varrho_\kappa \varrho_{iij} + 3\varrho_\kappa \varrho_{(ii} v_{j)} + \varrho_\kappa v_i v_i v_j, \\
\hat{G}_\alpha &= \hat{q}_\alpha + v_i \hat{p}_{i\alpha}, \\
\hat{G}_{ij\alpha} &= \hat{p}_{ij\alpha} + v_i \hat{p}_{j\alpha} + v_j \hat{p}_{i\alpha}, \\
\hat{G}_{iijk} &= \hat{p}_{iijk} + 3v_{(i} v_i \hat{p}_{j)k} + 3v_{(i} \hat{p}_{ij)k},
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

O sistema (2.3) é equivalente ao sistema de equações de balanço consistindo de (2.1) e (2.2). O tensor $\hat{T}_{i\alpha} = -\hat{p}_{i\alpha}$ é o tensor tensão Piola-Kirchoff e $\hat{q}_\alpha$ é algumas vezes chamado por fluxo de energia material.

Para materiais viscoelásticos, um estado pode ser caracterizado pelos seguintes campos termodinâmicos:

$$
\begin{array}{ll}
F_{i\alpha} & \text{gradiente de deformação,} \\
v_i & \text{velocidade,} \\
\varepsilon & \text{energia interna específica,} \\
T_{ij} & \text{tensor tensão,} \\
q_j & \text{fluxo de calor.}
\end{array}
\tag{2.5}
$$

Obviamente, o gradiente de deformação está sendo considerado no lugar da densidade, como um campo termodinâmico para que os sólidos possam ser incluídos na teoria.

O sistema (2.3) deve ser completado por relações constitutivas que em termodinâmicas estendidas são assumidas serem locais e instantâneas.

Equações constitutivas não são inteiramente arbitrárias. Elas estão restritas por um princípio físico universal e, em particular o princípio de entropia e objetividade material. Mais a frente será imposta uma condição de hiperbolicidade.

3. Princípio de Entropia

O princípio de entropia estabelece que para todo processo termodinâmico a inequação de entropia deve ser válida

$$
\varrho_\kappa \dot{\eta} + \frac{\partial \hat{\Phi}_\alpha}{\partial X_\alpha} = s \geq 0. \tag{3.1}
$$

Esta também está escrita no sistema de coordenadas materiais e similarmente é introduzido $\hat{\Phi}_\alpha = (\varrho_\kappa/\varrho)\Phi_\kappa F^{-1}_{\alpha k}$, onde Φ_κ é o fluxo de entropia. Além disso, a função η é admitida ser côncava nas variáveis-campo básicas e tanto η quanto $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ são admitidas ser objetivas. A produção de entropia s é uma quantidade não negativa.

Observe que os campos $F_{s\alpha}$ e v_s não são inteiramente independentes. De acordo com suas definições, eles estão relacionados pela seguinte identidade

$$\dot{F}_{s\alpha} - \frac{\partial v_s}{\partial X_\alpha} = 0. \tag{3.2}$$

Observe ainda que a primeira equação de (2.3), $\dot{\varrho}_\kappa = 0$, meramente afirma que ϱ_κ é um campo independente do tempo. Juntando as outras equações de (2.3) com (3.2) obtém-se um sistema que pode ser escrito na forma

$$A_{ab}Y_b + B_a = 0.$$

Isto e a objetividade de η e $\hat{\Phi}_\alpha$ implicam na existência de multiplicadores de Lagrange [5] $\lambda_{i\beta}, \Lambda, \Lambda_{ij}, \lambda_j, \Lambda_i$ tais que

$$\begin{aligned}
d\eta = &\quad \lambda_{i\beta} dF_{i\beta} + \Lambda d\varepsilon + \Lambda_{rl} d\varrho_{rl} + \lambda_l d\varrho_{rrl}, \\
0 = &\quad \Lambda_i + 3\lambda_{(i}\varrho_{rr)}, \\
d\hat{\Phi}_\alpha = &\quad \Lambda d\hat{q}_\alpha + \Lambda_i d\hat{p}_{i\alpha} + \Lambda_{ij} d\hat{p}_{ij\alpha} + \lambda_j d\hat{p}_{iij\alpha}, \\
0 = &\quad -\varrho_\kappa \lambda_{i\alpha} + \Lambda \hat{p}_{i\alpha} + 2\Lambda_{ij}\hat{p}_{j\alpha} + 3\lambda_{(j}\hat{p}_{ij)\alpha}, \\
s = &\quad \varrho_\kappa \left(\Lambda_{rl}\pi_{rl} + \lambda_l \pi_{rrl}\right) \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

4. Equilíbrio

O *equilíbrio* é definido como um processo termodinâmico sem produção de entropia. De acordo com [13], temos que a condição necessária para o mínimo da produção de entropia implica que

$$0 = \frac{\partial s}{\partial \pi_{ij}}|_E = \varrho_\kappa \Lambda_{ij}|_E, \qquad 0 = \frac{\partial s}{\partial \pi_{iij}}|_E = \varrho_\kappa \lambda_j|_E. \tag{4.1}$$

Tanto $|_E$ quanto o índice o denotarão a avaliação no equilíbrio. De $(3.3)_2$ tem-se $\Lambda_k|_E = 0$.

Avalie a relação $(3.3)_1$ no equilíbrio e use $(3.3)_4$ para ter

$$d\eta|_E = \lambda_{i\beta}|_E dF_{i\beta} + \Lambda|_E d\varepsilon = \Lambda|_E \left(d\varepsilon + \frac{1}{\varrho_\kappa}\hat{p}^o_{i\beta} dF_{i\beta}\right). \tag{4.2}$$

Comparando com a relação de Gibbs[14]

$$d\eta_o = \frac{1}{\theta}\left(d\varepsilon + \frac{1}{\varrho_\kappa}\hat{p}^o_{i\beta} dF_{i\beta}\right), \tag{4.3}$$

para materiais elásticos, decorrente da teoria ordinária [9], tem-se as identificações

$$\Lambda|_E = \frac{1}{\theta}, \tag{4.4}$$

onde θ é a temperatura. Por $(3.3)_4$

$$\lambda_{i\beta}|_E = \frac{1}{\theta\varrho_\kappa}\hat{p}^o_{i\beta}. \tag{4.5}$$

Cada um dos termos, definidos abaixo,

$$\begin{aligned} \Lambda_\varepsilon = {} & \Lambda - \frac{1}{\theta}, & \Lambda^\varepsilon_{i\beta} = {} & \lambda_{i\beta} - \frac{1}{\theta\varrho_\kappa}\hat{p}^o_{i\beta}, \\ \hat{S}_{ij} = {} & \hat{p}^o_{ij} - \hat{p}_{ij}, & \varrho_\varepsilon = {} & \varrho_{ss} - \varrho_{ss}|_E, \end{aligned} \tag{4.6}$$

se anula no equilíbrio e $\Lambda_\varepsilon, \Lambda^\varepsilon_{i\beta}$ herdarão o nome de multiplicadores de Lagrange.

Analogamente a [13], a função

$$\hat{\eta} = \Lambda_{\langle ij\rangle}\varrho_{\langle ij\rangle} + \lambda_j \varrho_{iij} - \eta, \tag{4.7}$$

e a conjugada do fluxo de entropia $\hat{\Phi}_k$

$$\check{\Phi}_k = \Lambda\hat{q}_k + \Lambda_i\hat{p}_{ik} + \Lambda_{ij}\hat{p}_{ijk} + \lambda_j\hat{p}_{iijk} - \hat{\Phi}_k, \tag{4.8}$$

satisfazem

$$\begin{aligned} d\hat{\eta} = {} & \left(\Lambda^\varepsilon_{i\beta} + \Lambda_\varepsilon\frac{\partial\varepsilon}{\partial F_{i\beta}} + \frac{\partial\eta_0}{\partial F_{i\beta}} + \frac{1}{3}\Lambda_{rr}\frac{\partial\varrho_{ss}|_E}{\partial F_{i\beta}}\right)dF_{i\beta} \\ & + \left(\Lambda_\varepsilon\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta} + \frac{\partial\eta_0}{\partial\theta} + \frac{1}{3}\Lambda_{rr}\frac{\partial\varrho_{ss}|_E}{\partial\theta}\right)d\theta + \frac{1}{3}\Lambda_{rr}d\varrho_\varepsilon + \varrho_{\langle ij\rangle}d\Lambda_{\langle ij\rangle} + \varrho_{iij}d\lambda_j, \\ d\check{\Phi}_k = {} & -\frac{1}{\theta^2}\hat{q}_k d\theta + \hat{q}_k d\Lambda_\varepsilon + \hat{p}_{ik}d\Lambda_i + \hat{p}_{\langle ij\rangle k}d\Lambda_{\langle ij\rangle} + \frac{1}{3}\hat{p}_{iik}d\Lambda_{jj} + \hat{p}_{iijk}d\lambda_j. \end{aligned} \tag{4.9}$$

e assumindo que ϱ_ε, Λ_ε, Λ_i, $\Lambda_{\langle ij\rangle}$, Λ_{jj} e λ_j são quantidades de ordem 1, obtem-se (veja [9]),

$$\begin{aligned} \hat{\eta} = {} & \eta_0 + k_0\varrho_\varepsilon + h_1\lambda_j\lambda_j + h_2\Lambda_{\langle ij\rangle}\Lambda_{\langle ij\rangle} + h_3\varrho^2_\varepsilon + o(3), \\ \check{\Phi}_k = {} & \alpha\lambda_k + \beta\Lambda_k + a_1\Lambda_\varepsilon\lambda_k + b_1\Lambda_\varepsilon\Lambda_k + a_2\Lambda_{\langle ki\rangle}\lambda_i + b_2\Lambda_{\langle ki\rangle}\Lambda_i \\ & + a_3\Lambda_{ii}\lambda_k + b_3\Lambda_{ii}\Lambda_k + o(3), \end{aligned} \tag{4.10}$$

onde os coeficientes $\eta_0, k_0, h_n, \alpha, \beta, a_n, b_n$, são funções de $(F_{i\beta}, \theta)$. A notação $o(n)$ representa termos de ordem maior ou igual a n nas quantidades Λ_ε, Λ_i, $\Lambda_{\langle ij\rangle}$, Λ_{jj} e λ_j.

5. Equações Constitutivas de Primeira Ordem

Comparando (4.9) com $(4.10)_1$ obtem-se as expressões

$$
\begin{aligned}
\varrho_{iij} &= 2h_1\lambda_j + o(2),\\
\frac{1}{3}\Lambda_{rr} &= k_0 + 2h_3\varrho_\varepsilon + o(2),\\
\varrho_{\langle ij\rangle} &= 2h_2\Lambda_{\langle ij\rangle} + o(2),\\
\Lambda_\varepsilon\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta} + \frac{1}{3}\Lambda_{rr}\frac{\partial\varrho_{ss}|_E}{\partial\theta} &= \frac{\partial k_0}{\partial\theta}\varrho_\varepsilon + o(2),\\
\Lambda^\varepsilon_{i\beta} + \Lambda_\varepsilon\frac{\partial\varepsilon}{\partial F_{i\beta}} + \frac{1}{3}\Lambda_{rr}\frac{\partial\varrho_{ss}|_E}{\partial F_{i\beta}} &= \frac{\partial k_0}{\partial F_{i\beta}}\varrho_\varepsilon + o(2),
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

para os multiplicadores de Lagrange. A equação $(5.1)_2$ avaliada no equilíbrio revela que $k_0 = 0$, e como conseqüência

$$
\begin{aligned}
\Lambda_\varepsilon &= -2c_\theta h_3\varrho_\varepsilon + o(2),\\
\Lambda^\varepsilon_{i\beta} &= \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial F_{i\beta}}c_\theta - \frac{\partial\varrho_{ss}|_E}{\partial F_{i\beta}}\right)2h_3\varrho_\varepsilon + o(2),
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

onde, $c_\theta = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}\right)^{-1}\frac{\partial\varrho_{ss}|_E}{\partial\theta}$. Usando $(3.3)_2$ encontra-se

$$
\Lambda_i = -\frac{5}{6}\frac{\varrho_{ss}|_E}{h_1}\varrho_{jji} + o(2). \tag{5.3}
$$

Comparando (4.9) com $(4.10)_2$ obtem-se as expressões

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{\theta^2}\hat q_k &= \frac{\partial\alpha}{\partial\theta}\lambda_k + \frac{\partial\beta}{\partial\theta}\Lambda_k + o(2),\\
\hat q_k &= a_1\lambda_k + b_1\Lambda_k + o(2),\\
\hat p_{ik} &= \beta\delta_{ik} + b_1\Lambda_\varepsilon\delta_{ik} + b_2\Lambda_{\langle ki\rangle} + b_3\Lambda_{jj}\delta_{ik} + o(2),\\
\hat p_{\langle ij\rangle k} &= a_2\delta_{k\langle i}\lambda_{j\rangle} + b_2\delta_{k\langle i}\Lambda_{j\rangle} + o(2),\\
\frac{1}{3}\hat p_{iik} &= a_3\lambda_k + b_3\Lambda_k + o(2),\\
\hat p_{iijk} &= (\alpha + a_1\Lambda_\varepsilon)\,\delta_{kj} + a_2\Lambda_{\langle kj\rangle} + a_3\Lambda_{ii}\delta_{kj} + o(2),\\
0 &= \frac{\partial\check\Phi_k}{\partial F_{i\beta}} = \frac{\partial\alpha}{\partial F_{i\beta}}\lambda_k + \frac{\partial\beta}{\partial F_{i\beta}}\Lambda_k + o(2),
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

para os fluxos. Já é sabido, $(4.6)_1$ e $(4.1)_1$, que os multiplicadores de Lagrange $\Lambda_\varepsilon, \Lambda_{ij}$ se anulam no equilíbrio. Logo

$$
\hat p^o_{ik} = \beta\delta_{ik} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{1}{3}\hat p^o_{ss}. \tag{5.5}
$$

As duas primeiras equações de (5.4), implicam

$$-\frac{1}{\theta^2}\hat{q}_k = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial\theta} - \frac{5}{3}\varrho_{ss}|_E\frac{\partial\beta}{\partial\theta}\right)\lambda_k + o(2) \quad \text{e} \quad \hat{q}_k = \left(a_1 - \frac{5}{3}\varrho_{ss}|_E b_1\right)\lambda_k + o(2).$$

Substituindo uma na outra, tem-se

$$0 = \frac{\partial\alpha}{\partial F_{i\beta}} - \frac{5}{3}\varrho_{ss}|_E\frac{\partial\beta}{\partial F_{i\beta}}. \tag{5.6}$$

O traço e a parte simetrizada sem traço da equação $(3.3)_4$, fornecerão relações de interesse. Ao calcular a simetrização sem traço de cada um dos membros de $(3.3)_4$, será obtida a equação

$$0 = -\varrho_\kappa\lambda_{\langle ik\rangle} + \Lambda\hat{p}_{\langle ik\rangle} + 2\Lambda_{j\langle i}\hat{p}_{k\rangle j} + 2\hat{p}_{j\langle ik\rangle}\lambda_j + \hat{p}_{jj\langle k}\lambda_{i\rangle}. \tag{5.7}$$

A parte linear do traço de $(3.3)_4$ reduz-se a

$$\varrho_\kappa + (c_\theta - 2)\beta = \frac{1}{\theta}(3b_3 - c_\theta b_1). \tag{5.8}$$

Em (4.6) foi definido o tensor $\hat{S}_{ij}$, mais conhecido como *tensor viscoso*. A partir deste tensor, é definida a *pressão dinâmica* $p_d = -\frac{1}{3}\hat{S}_{kk}$. É evidente que a pressão dinâmica herda do tensor viscoso a propriedade de se anular no equilíbrio. Por

$$\hat{p}_{ij} = (\beta + p_d)\delta_{ij} - \hat{S}_{\langle ij\rangle}, \tag{5.9}$$

e as relações $(5.4)_3$, $(5.1)_{2,3}$, $(5.2)_1$ tem-se que

$$p_d = (3b_3 - c_\theta b_1)2h_3\varrho_\varepsilon + o(2), \quad \hat{S}_{\langle ij\rangle} = -\frac{\theta}{2h_2}(\varrho_\kappa - 2\beta)\varrho_{\langle ij\rangle} + o(2). \tag{5.10}$$

Há ainda, mais uma equação a ser obtida usando as representações (4.10) de η e $\check{\Phi}_k$, somente até segunda ordem. A saber, a equação c escrita mediante termos de segunda ordem que, pela independência linear dos tensores $\varrho_{\langle ki\rangle}$ e δ_{ki}, implica

$$\begin{gathered}\frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial a_2}{\partial F_{i\beta}} - \frac{5}{3}\varrho_{ss}|_E\frac{\partial b_2}{\partial F_{i\beta}}\right) - 4\frac{\partial\beta}{\partial F_{i\beta}} = 0,\\ \frac{5}{3}\frac{\partial\beta}{\partial F_{i\beta}} + 2c_\theta h_3\left(\frac{\partial a_1}{\partial F_{i\beta}} - \frac{5}{3}\varrho_{ss}|_E\frac{\partial b_1}{\partial F_{i\beta}}\right) - 6h_3\left(\frac{\partial a_3}{\partial F_{i\beta}} - \frac{5}{3}\varrho_{ss}|_E\frac{\partial b_3}{\partial F_{i\beta}}\right) = 0.\end{gathered} \tag{5.11}$$

Em resumo, as equações constitutivas para os fluxos são

$$\begin{aligned}\hat{q}_k &= \frac{A_1}{2h_1}\varrho_{iik} + o(2),\\ \hat{p}_{ik} &= (\beta + p_d)\delta_{ik} - \hat{S}_{\langle ik\rangle},\\ \hat{p}_{ijk} &= \frac{A_2}{2h_1}\varrho_{nn\langle i}\delta_{j\rangle k} + \frac{A_3}{2h_1}\varrho_{nnk}\delta_{ij} + o(2),\\ \hat{p}_{iijk} &= \alpha\delta_{kj} + (3a_3 - c_\theta a_1)2h_3\varrho_\varepsilon\delta_{kj} + \frac{a_2}{2h_2}\varrho_{\langle kj\rangle} + o(2),\end{aligned} \tag{5.12}$$

com

$$
\begin{aligned}
A_i &= a_i - \frac{5}{3}\varrho_{ss}|_E b_i, & A_1 &= -\theta^2\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\theta} - \frac{5}{3}\varrho_{ss}|_E\frac{\partial\beta}{\partial\theta}\right),\\
0 &= \frac{\partial\alpha}{\partial F_{i\beta}} - \frac{5}{3}\varrho_{ss}|_E\frac{\partial\beta}{\partial F_{i\beta}}, & p_d &= (3b_3 - c_\theta b_1)2h_3\varrho_\varepsilon + o(2),\\
c_\theta &= \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}\right)^{-1}\frac{\partial\varrho_{ss}|_E}{\partial\theta}, & \hat{S}_{\langle ij\rangle} &= -\frac{\theta}{2h_2}(\varrho_\kappa - 2\beta)\varrho_{\langle ij\rangle} + o(2),\\
\beta &= \frac{1}{3}\hat{p}^o_{ss}, & b_2 &= (\varrho_\kappa - 2\beta)\,\theta.
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

6. Produção de Entropia

Foi visto na Seção 4 que a produção de entropia s é mínima no estado de equilíbrio. Além da condição (4.1), para que s seja mínima no equilíbrio, é exigido também que

$$
\left.\frac{\partial^2 s}{\partial X_A \partial X_B}\right|_E \geq 0, \tag{6.1}
$$

onde X_A é da forma $(\Lambda^\varepsilon_{i\beta}, \Lambda_\varepsilon, \Lambda_{ij}, \lambda_j)$.

As funções π_{ij} e π_{iij} dependem de $(\lambda_{i\beta}, \Lambda, \Lambda_{ij}, \lambda_j)$ e conseqüentemente, dependem de $(\Lambda^\varepsilon_{i\beta}, \Lambda_\varepsilon, \Lambda_{ij}, \lambda_j)$. Portanto as representações lineares de π_{ij} e π_{iij} são dadas por

$$
\begin{aligned}
\pi_{ij} &= r_1\Lambda_{ij} + r_2\Lambda^\varepsilon_{ij} + r_3\Lambda_\varepsilon\delta_{ij} + o(2),\\
\pi_{iij} &= \tau\lambda_j + o(2),
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

onde r_1, r_2, r_3 e τ são funções de (F_{ij}, θ). Então a expressão $(3.3)_5$ para a produção de entropia torna-se

$$
s = \varrho_\kappa\left(r_1\Lambda_{ij}\Lambda_{ij} + r_2\Lambda^\varepsilon_{ij}\Lambda_{ij} + r_3\Lambda_\varepsilon\Lambda_{ii} + \tau\lambda_j\lambda_j\right) + o(3). \tag{6.3}
$$

A inequação (6.1) é agora rescrita como

$$
w\cdot\left.\frac{\partial^2 s}{\partial X_A \partial X_B}\right|_E w = 2r_2\Lambda_{ij}\Lambda^\varepsilon_{ij} + 2r_3\Lambda_{ii}\Lambda_\varepsilon + 2r_1\Lambda_{ij}\Lambda_{ij} + 2\tau\lambda_p\lambda_p \geq 0,
$$

para todo vetor $w = (\Lambda^\varepsilon_{ij}, \Lambda_\varepsilon, \Lambda_{ij}, \lambda_p)$. Particularizamos os vetores w e obtivemos restrições sobre os coeficientes r_1, r_2, r_3 e τ. De fato, fizemos somente Λ_{12} não nulo e obtivemos $r_1 \geq 0$. Fizemos somente λ_1 não nulo e obtivemos $\tau \geq 0$ e por último, tomamos w cujas coordenadas $\lambda_p = 0$ para $p = 1, 2, 3$, $\Lambda_{kl} = 0$ para $k \neq l$, e concluímos que

$$
2r_2\Lambda_{jj}\Lambda^\varepsilon_{ii} + 2r_3\Lambda_{ii}\Lambda_\varepsilon \geq 0,
$$

para todo Λ_{jj}, Λ^ε_{ii} e Λ_ε. Fizemos $\Lambda_\varepsilon = 0$ e obtivemos $r_2 = 0$ e por conseguinte que $r_3 = 0$.

Da invertibilidade de π_{ij} na variável Λ_{ij}, e de π_{iij} na variável λ_j, tem-se

$$
r_1 > 0 \quad \text{e} \quad \tau > 0. \tag{6.4}
$$

7. Concavidade da Densidade de Entropia

Uma condição suficiente para que o sistema (2.1) e (2.2) seja hiperbólico é $h(\boldsymbol{u})$ ser uma função côncava [10]. Isto ocorrerá se, e somente se

$$\delta\hat{\boldsymbol{\Lambda}}\cdot\delta\boldsymbol{U}<0 \quad \text{para todas as variações} \quad \delta\hat{\boldsymbol{\Lambda}},\delta\boldsymbol{U},$$

onde $\delta\hat{\boldsymbol{\Lambda}}=(\delta(\varrho_\kappa\hat{\lambda}_{s\alpha}),\delta\hat{\Lambda}_i,\delta\hat{\Lambda},\delta\hat{\Lambda}_{ij},\delta\hat{\lambda}_j)$ e $\delta\boldsymbol{U}=(\delta F_{s\alpha},\delta(\varrho v_i),\delta(\varrho e),\delta u_{ij},\delta u_{iij})$.

Por se tratar de uma forma quadrática, e supondo $\dot{\varrho}_\kappa=0$ e $\det F>0$, a expressão $\delta\hat{\boldsymbol{\Lambda}}\cdot\delta\boldsymbol{u}$ é posta na forma $\boldsymbol{w}\cdot A\boldsymbol{w}$ onde $\boldsymbol{w}=(\delta F_{ij},\delta\theta,\delta\varrho_\varepsilon,\delta v_k,\delta\varrho_{\langle kl\rangle},\delta\varrho_{ssk})$ e A é uma matriz negativa definida composta de blocos e coeficientes $C_{ijrs},C_{v_iv_k},C_{\theta\theta}$.

Da relação de Gibbs (4.3), tira-se

$$\frac{\partial\eta_0}{\partial\theta}=\frac{1}{\theta}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta} \qquad \text{e} \qquad \theta\frac{\partial\eta_0}{\partial F_{ij}}=\frac{\partial\varepsilon}{\partial F_{ij}}+\frac{1}{\varrho_\kappa}\hat{p}^o_{ij}. \tag{7.1}$$

Pela expressão de c_θ, tem-se que

$$c_\theta\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}=\frac{\partial\varrho_{ss}|_E}{\partial\theta}. \tag{7.2}$$

É sabido que uma matriz negativa definida possui os coeficientes da diagonal negativos. Portanto,

$$C_{ijrs}<0 \;\text{ para }\; i=j=r=s,\;\; C_{\theta\theta}<0,\;\; C_{v_iv_k}<0 \;\text{ para }\; i=k,\;\text{ e }\; h_1<0. \tag{7.3}$$

Em particular,

$$\frac{\partial\hat{p}^0_{ij}}{\partial F_{rs}}=\theta C_{ijrs}|_E<0 \;\text{ para }\; i=j=r=s \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}=-\frac{\theta^2}{\varrho}C_{\theta\theta}|_E>0. \tag{7.4}$$

A relação $(7.4)_2$ juntamente com a $(7.1)_1$ implicam que

$$\frac{\partial\eta_0}{\partial\theta}>0, \tag{7.5}$$

além de mostrar que o calor específico $c_v=\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}$ a volume constante, é positivo.

8. Conclusão

Esse trabalho, feito para materiais viscoelásticos, é uma ampliação do trabalho feito em [13] feito para fluidos. Pelo fato do esperado ter ocorrido, ou seja, obter os resultados (5.12), (6.4) e (7.5) com similaridade aos obtidos em [13], ficamos satisfeitos com os resultados. Aqui, a originalidade é, no mínimo, a mesma que em [13], ou seja, com um menor número de variáveis, foram obtidos os resultados em (5.12), (5.13). Uma extensão direta desse trabalho seria usar os termos de ordem 3 para a densidade e fluxos de entropia em (4.10) e uma outra extensão seria encontrar um sistema de equações diferenciais parciais quase-linear para um sólido com condução de calor.

9. Apêndice

A matriz A da seção 7 é igual a

$$
\begin{bmatrix}
[C_{ijrs}]_{9\times 9} & [C_{ij\theta}]_{9\times 1} & [C_{ij\varrho_\varepsilon}]_{9\times 1} & [C_{ijv_k}]_{9\times 3} & [D_{ijrs}]_{9\times 9} & [D_{ijk}]_{9\times 3} \\
[C_{ij\theta}]^T_{1\times 9} & [C_{\theta\theta}]_{1\times 1} & [C_{\theta\varrho_\varepsilon}]_{1\times 1} & [C_{\theta v_k}]_{1\times 3} & [C_{\theta kl}]_{1\times 9} & [C_{\theta k}]_{1\times 3} \\
[C_{ij\varrho_\varepsilon}]^T_{1\times 9} & [C_{\theta\varrho_\varepsilon}]^T_{1\times 1} & 0 & [-\varrho\frac{2\varrho_{llk}}{3h_1}]_{1\times 3} & [0]_{1\times 9} & [0]_{1\times 3} \\
[C_{ijv_k}]^T_{3\times 9} & [C_{\theta v_i}]^T_{3\times 1} & [-\varrho\frac{2\varrho_{llk}}{3h_1}]^T_{3\times 1} & [C_{v_iv_k}]_{3\times 3} & [-\varrho\frac{\varrho_{nnl}}{2h_1}\delta_{ik}]_{3\times 9} & [\varrho\frac{v_iv_k}{2h_1}]_{3\times 3} \\
[D_{ijrs}]^T_{9\times 9} & [C_{\theta kl}]^T_{9\times 1} & [0]_{9\times 1} & [-\varrho\frac{\varrho_{nnl}}{2h_1}\delta_{ik}]^T_{9\times 3} & [0]_{9\times 9} & [\frac{\varrho v_k}{2h_1}\delta_{il}]_{9\times 3} \\
[D_{ijk}]^T_{3\times 9} & [C_{\theta k}]^T_{3\times 1} & [0]_{3\times 1} & [\varrho\frac{v_iv_k}{2h_1}]_{3\times 3} & [\frac{\varrho v_k}{2h_1}\delta_{il}]^T_{3\times 9} & \frac{\varrho}{2h_1}Id_{3\times 3}
\end{bmatrix},
$$

onde os seus coeficientes desconhecidos são apresentados abaixo:

$$
\begin{aligned}
C_{ijrs} = \quad & \frac{1}{\theta}\frac{\partial \hat{p}^0_{ij}}{\partial F_{rs}} + \varrho_\kappa\left(2\frac{\partial h_3}{\partial F_{rs}}\varrho_\varepsilon\delta_{ij} - \frac{1}{2h_2^2}\frac{\partial h_2}{\partial F_{rs}}\varrho_{\langle ij\rangle}\right) - 2\frac{\varepsilon\varrho_\kappa}{\det F}F^{-1}_{sr}\varrho_\varepsilon\left(\frac{\partial c_\theta}{\partial F_{ij}}h_3 + \frac{\partial h_3}{\partial F_{ij}}c_\theta\right) \\
& -2\varrho\frac{\partial\varepsilon}{\partial F_{rs}}\varrho_\varepsilon\left(\frac{\partial c_\theta}{\partial F_{ij}}h_3 + \frac{\partial h_3}{\partial F_{ij}}c_\theta\right) - \frac{\varrho}{3h_1^2}v_k\varrho_{llk}\frac{\partial h_1}{\partial F_{rs}}\frac{\partial \varrho_{nn}|_E}{\partial F_{ij}} \\
& +v_l\left\{-\frac{v_kv_k}{h_1^2}\varrho_{nnl}\frac{\partial h_1}{\partial F_{rs}} - v_k\left(2\varrho_\varepsilon\frac{\partial h_3}{\partial F_{rs}} - \frac{\varrho_{\langle kl\rangle}}{2h_2^2}\frac{\partial h_2}{\partial F_{rs}}\right) + v_l\varrho_\varepsilon\left(h_3\frac{\partial c_\theta}{\partial F_{rs}} + c_\theta\frac{\partial h_3}{\partial F_{rs}}\right)\right. \\
& \left. -\frac{1}{3h_1}\varrho_{kkl}\frac{\partial\varrho_{nn}|_E}{\partial F_{rs}}\right\}\frac{\varrho_\kappa}{\det F}F^{-1}_{ji},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{ij\theta} = \quad & -\frac{\varepsilon\varrho_\kappa}{\det F}F^{-1}_{ji}\varrho_\varepsilon\left(\frac{\partial c_\theta}{\partial\theta}h_3 + \frac{\partial h_3}{\partial\theta}c_\theta\right) + \frac{1}{2\theta^2}\left[\theta\frac{\partial\hat{p}^0_{ij}}{\partial\theta} - \hat{p}^0_{ij} - \varrho\frac{\partial\varepsilon}{\partial F_{ij}} - \frac{\varepsilon\varrho_\kappa}{\det F}F^{-1}_{ji}\right] \\
& +\varrho_\kappa\left(\frac{\partial h_3}{\partial\theta}\varrho_\varepsilon\delta_{ij} - \frac{1}{4h_2^2}\frac{\partial h_2}{\partial\theta}\varrho_{\langle ij\rangle}\right) - \varrho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}\varrho_\varepsilon\left(\frac{\partial c_\theta}{\partial F_{ij}}h_3 + \frac{\partial h_3}{\partial F_{ij}}c_\theta\right) \\
& -\varrho\frac{\partial\varepsilon}{\partial F_{ij}}\varrho_\varepsilon\left(\frac{\partial c_\theta}{\partial\theta}h_3 + \frac{\partial h_3}{\partial\theta}c_\theta\right) - \frac{\varrho}{3h_1^2}v_k\varrho_{llk}\frac{\partial h_1}{\partial F_{ij}}\frac{\partial\varrho_{nn}|_E}{\partial\theta} \\
& +\frac{v_l}{2}\left\{-\frac{v_kv_k}{h_1^2}\varrho_{nnl}\frac{\partial h_1}{\partial\theta} - 2\varrho_\varepsilon\frac{\partial h_3}{\partial\theta}v_l + \frac{v_k}{2h_2^2}\varrho_{\langle kl\rangle}\frac{\partial h_2}{\partial\theta} + v_l\varrho_\varepsilon\left(h_3\frac{\partial c_\theta}{\partial\theta} + c_\theta\frac{\partial h_3}{\partial\theta}\right) + \frac{v_l}{\theta^2}\right. \\
& \left. -\frac{1}{3h_1}\varrho_{kkl}\frac{\partial\varrho_{nn}|_E}{\partial\theta}\right\}\frac{\varrho_\kappa}{\det F}F^{-1}_{ji},
\end{aligned}
$$

$$
C_{ij\varrho_\varepsilon} = \quad \varrho_\kappa h_3\delta_{ij} - \varrho\frac{\partial\varepsilon}{\partial F_{ij}}c_\theta h_3 - \left(\varepsilon c_\theta h_3 + 2v_sv_sh_3 + 2c_\theta h_3 + \frac{v_l}{6h_1}\varrho_{kkl}\right)\frac{\varrho_\kappa}{\det F}F^{-1}_{ji},
$$

$$
\begin{aligned}
C_{ijv_k} &= \frac{1}{2}\left[v_k\left(2c_\theta\varrho_\varepsilon h_3-\frac{1}{\theta}\right)-\frac{v_l}{h_2}\varrho_{\langle kl\rangle}-4h_3v_k\varrho_\varepsilon+\frac{v_lv_l}{2h_1}\varrho_{nnk}+\frac{v_kv_l}{h_1}\varrho_{nnl}\right.\\
&\quad\left.-\frac{5}{6}\frac{\varrho_{nn}|_E}{h_1}\varrho_{llk}\right]\frac{\varrho_\kappa}{\det F}F^{-1}_{ji}-\varrho\frac{v_kv_l}{2h_1^2}\varrho_{nnl}\frac{\partial h_1}{\partial F_{ij}}-\frac{4}{6}\frac{\varrho}{h_1}\varrho_{llk}\frac{\partial\varrho_{ss}|_E}{\partial F_{ij}},\\
D_{ijrs} &= \frac{\varrho_\kappa}{4h_2}\delta_{ri}\delta_{sj}-\frac{1}{2}\left(v_rv_s\frac{1}{2h_2}+\frac{v_s}{h_1}\varrho_{llr}\right)\frac{\varrho_\kappa}{\det F}F^{-1}_{ji}-\frac{\varrho}{2h_1^2}v_r\varrho_{lls}\frac{\partial h_1}{\partial F_{ij}},\\
D_{ijk} &= \left(\varrho_{llk}-2v_l\varrho_{lk}-v_s\varrho_{ll}+2v_lv_lv_k\right)\frac{1}{4h_1}\frac{\varrho_\kappa}{\det F}F^{-1}_{ji}+\frac{\varrho}{6h_1}v_k\frac{\partial\varrho_{nn}|_E}{\partial F_{ij}}-\frac{\varrho}{4h_1^2}\varrho_{llk}\frac{\partial h_1}{\partial F_{ij}},\\
C_{\theta\theta} &= -\frac{\varrho}{\theta^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}-2\varrho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}\varrho_\varepsilon\left(\frac{\partial c_\theta}{\partial\theta}h_3+\frac{\partial h_3}{\partial\theta}c_\theta\right)-\frac{\varrho}{3h_1^2}v_r\varrho_{llr}\frac{\partial h_1}{\partial\theta}\frac{\partial\varrho_{ss}|_E}{\partial\theta},\\
C_{\theta\varrho_\epsilon} &= -\varrho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}c_\theta h_3,\\
C_{\theta v_k} &= -\varrho\frac{v_kv_l}{2h_1^2}\varrho_{nnl}\frac{\partial h_1}{\partial\theta}-\frac{2}{3}\frac{\varrho}{h_1}\varrho_{nnk}\frac{\partial\varrho_{nn}|_E}{\partial\theta},\\
C_{\theta kl} &= -\frac{\varrho}{2h_1^2}v_k\varrho_{nnl}\frac{\partial h_1}{\partial\theta},\\
C_{\theta k} &= \frac{\varrho}{6h_1}v_k\frac{\partial\varrho_{ss}|_E}{\partial\theta}-\frac{\varrho}{4h_1^2}\varrho_{llk}\frac{\partial h_1}{\partial\theta},\\
C_{v_iv_k} &= \left[\frac{\varrho}{\theta}+2\varrho h_3\varrho_\varepsilon\left(c_\theta+2\right)\right]\delta_{ik}+\frac{\varrho}{2h_2}\varrho_{\langle ik\rangle}.
\end{aligned}
$$

Abstract. In this paper an extended thermodynamic formulation for viscoelastic materials with heat conduction is presented. The requirement of Galilean invariance on the balance equations and the entropy principle lead to the introduction of Lagrange multipliers, which provide constitutive equations for the flux. A hyperbolic condition of the equations system is obtained through the concavity of the entropy density.

Keywords. Entropy, Lagrange multipliers, gases, fluids.

Referências

[1] G.M. Kremer, Extended thermodynamics of ideal gases with 14 fields, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **45** (1986), 419–440.

[2] G.M. Kremer, Extended thermodynamics of non-ideal gases, *Physica*, **144A** (1987), 156–178.

[3] G.M. Kremer, Extended thermodynamics of molecular ideal gases, *Continuum Mech. Thermodyn.*, **1** (1989), 21–45.

[4] G.M. Kremer, C. Beevers, Extended thermodynamics of dense gases, *Lecture Note in Physics*, **199** (1984), 429–436.

[5] I-Shih Liu, Method of Lagrange multipliers for exploitation of the entropy principle, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **46** (1972), 131–148.

[6] I-Shih Liu, An extended field theory of viscoelastic materials, *Int. J. Engng Sci.*, **26** (1988), 331–342.

[7] I-Shih Liu, Extended thermodynamics of viscoelastic materials, *Continuum Mech. Thermodyn*, **1** (1989), 143–164.

[8] I-ShihLiu, Extended thermodynamics of viscoelasticity, *Proceedings of the* 5^{th} *Bilateral Polish-Italian Meeting, Thermodynamics and kinetic theory. World Scientific Publishing, Singapore*, (1990) 93–106 .

[9] I-Shih Liu, "Continuum Mechanics", Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (2002).

[10] I-Shih Liu, G.M. Kremer, Hyperbolic system of field equations for viscous fluids, *Mat. Aplic. Comp.*, **9** (1990), 123–135.

[11] I-Shih Liu, I. Müller, Extended thermodynamics of classical and degenerate gases, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **83** (1983), 285–332.

[12] I. Müller, T. Ruggeri, "Rational Extended Thermodynamics", Second Edition, Springer-Verlag, New York (1998).

[13] A. Vignatti, I-Shih Liu, Termodinâmica estendida de fluidos viscosos com condução de calor, *TEMA, SBMAC*, numero **2** (2006), 381–390.

[14] R. Resnick, D. Halliday, "Física", v2 4^a ed., Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. (1984).

[15] T. Ruggeri, Galilean invariance and entropy principle for systems of balance laws, *Continuum Mech. Thermodyn.*, **1** (1989), 3–20.